O experimento de Stern-Gerlach (1922)

Ilustra o comportamento quântico de sist. simples (spin $\frac{1}{2}$). "Laboratório" conceitual para o entendimento da teoria.

- É uma medida das propriedades magnéticas de átomos de prata.

Átomo de Ag: 46 elétrons em nuvem esférica

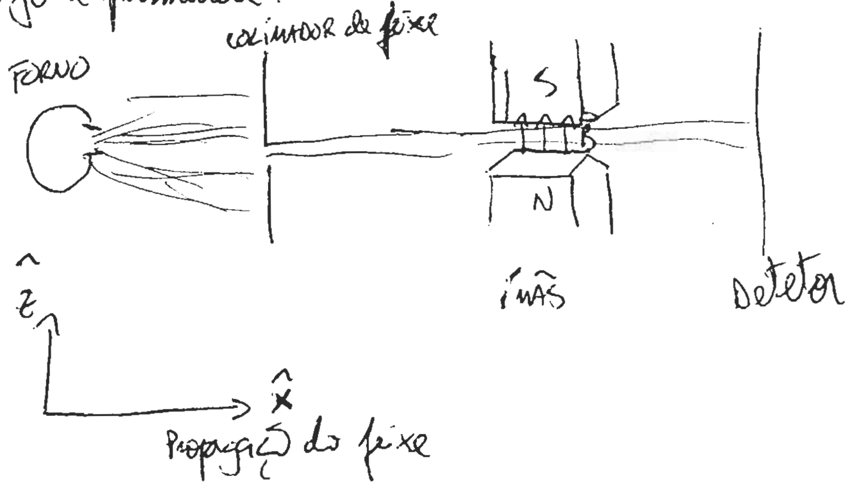
+ 1 elétron na camada 5s.

$\Rightarrow$ momento angular do átomo = mom. angular do elétron externo. (SPIN)

$\Rightarrow$ mom. magnético $\vec{\mu} \propto \vec{S}$ ← SPIN.

$$\left(\vec{\mu} = \frac{e}{m_e c} \vec{S} \right), \quad e < 0$$

- Arranjo experimental:



- campo $\vec{B}$ entre ímãs é inhomogêneo na direção $\hat{z}$.

- Efeito de $\vec{B}$ sobre átomos:

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \quad \Rightarrow \quad F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\mu}\cdot\vec{B}\right) \sim \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

- arranjo de ímãs torna $\frac{\partial B_z}{\partial z} \gg \frac{\partial B_x}{\partial z}, \frac{\partial B_y}{\partial z}$

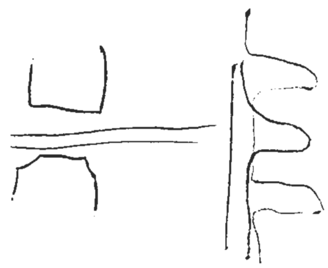
- Resultado: átomos com $\mu_z > 0$ $(S_z < 0)$ sofre força ↑

  $\mu_z < 0$ ↓.

  $\Rightarrow$ feixe se dividirá de acordo com μ_z.

- Classicamente, esperamos que μ_z do conjunto de átomos se distribua aleatoriamente entre $|\vec{\mu}|$ e $-|\vec{\mu}|$ — [componente $\hat{z}$ de vetor aleatório]

Expectativa:



detetor

Resultado experimental:

- μ_z só tem 2 valores possíveis $\Rightarrow$ S_z também. $\left(S_z^{+} \text{ e } S_z^{-}\right)$
- o experimento permite estimar $S_z^{\pm}$.

$$S_z^{\pm} = \pm\frac{\hbar}{2} \quad \text{com } \hbar = 6{,}5822\cdot 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}$$

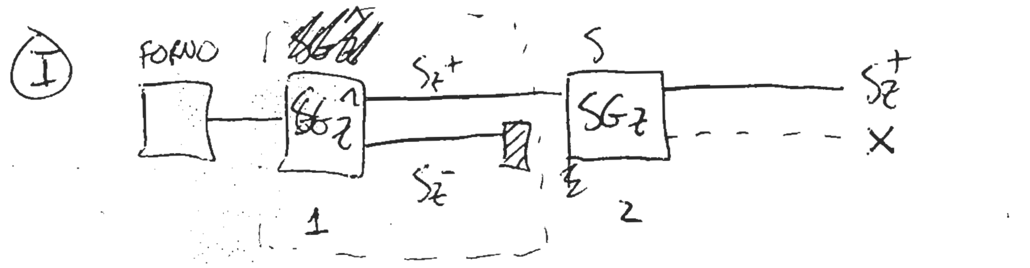
- Descobriu-se a quantização do momento angular $\vec{S}$ do elétron/átomo.
- A mesma quantização se observa com qualquer componente de $\vec{S}$.

SG's ~~[illegible]~~ em sequência

- Mais de um conjunto de ímãs SG com ~~[illegible]~~ orientações diferentes.

- Vamos analisar alguns experimentos de SG.

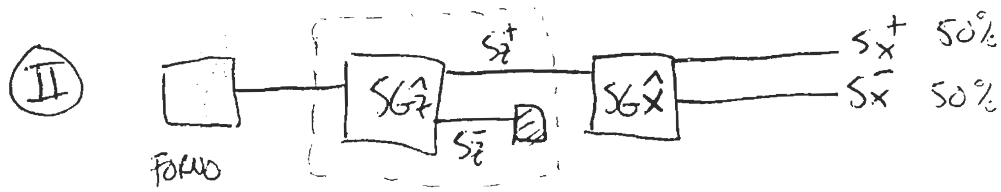
(I)



= preparação de feixe S_z^+

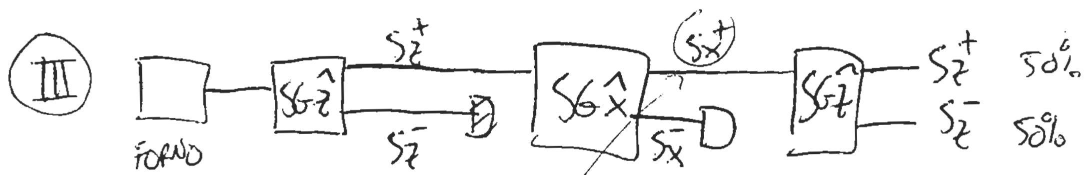
- $SG\hat{z}_1$ seleciona S_z^+, e $SG\hat{z}_2$ "confirma" a seleção.

(II)



Interpretação? Feixe S_z^+ = { 50% dos átomos ~~[illegible]~~ têm S_z^+ e S_x^+.
50% ~~[illegible]~~ S_z^+ e S_x^-.

(III)



- Como ~~[illegible]~~ o feixe S_x^+ "readquire" um componente S_z^-?

- Na MQ as medidas não "filtram" propriedades. Cada medida cria estados ~~[illegible]~~ com novas propriedades.
  - A 2ª medida $SG\hat{x}$ "apaga" propriedades anteriores (S_z^+).

- Os resultados acima não dependem dos detalhes experimentais, são inevitáveis de acordo com a MQ.

SG nos mostra que:

1- Previsões da MQ são probabilísticas.

2- ~~[illegible]~~ Há pares de propriedades (S_x e S_z) que não podem ser determinados simultaneamente.

3- Medidas de propriedades alteram o sistema.

4- Como modelar uma medida em MQ:

- acoplar o sist. a um outro grau de liberdade que possa ser medido (momento/posição)
(ex: spin do $\bar{e}$)

via interação adequada (Hamiltoniana $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$)

GOTT.2.2

Vetores-estado e operadores

~~[illegible]~~ O estado de 1 sistema = informação completa sobre as propriedades dele. Por exemplo, Em mec. clássica, o estado de 1 partícula é dado pela sua posição e velocidade.

Em MQ:

POSTULADO 1: O estado de um sist. físico S é dado por um vetor $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (espaço vetorial complexo) apropriado ao sistema. [Qualquer combinação linear de vetores-estado representa um estado possível de S] = princípio da superposição.

Vamos formular a matemática básica de espaços vetoriais complexos, usando a notação de Dirac, que ~~simplifica os cálculos, e o entende~~ é muito prática para a MQ.

Espaços vetoriais

- conj. de elementos (vetores) fechado por adição e multiplicação por $\underbrace{\text{scalars}}_{\text{em MQ = n. complexos}}$

⇒ Se $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ são vetores ⇒ $a|\phi\rangle + b|\psi\rangle$ também é.

[notação de Dirac]

- Em MQ usaremos muito 2 classes de espaços vetoriais:

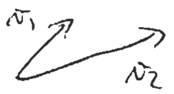
(i) vetores discretos, representáveis por colunas de n. complexos:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

(ii) outro conjunto de funções, por exemplo o espaço de fções diferenciáveis.

- conj. de vetores $\{|\phi_n\rangle\}$ é <u>linearmente independente</u> se $\sum_n c_n \phi_n = 0$ vale somente quando $c_n = 0 \; \forall n$. Se o conj. for <u>linearmente dependente</u>, é possível expressar um dos ϕ_j como combinação linear dos outros.

  - O maior no. de vetores LI num espaço é a dimensão do espaço.
  - Um conj. c/ o no. máximo de vetores LI é chamado de <u>base</u> p/ o espaço.
  - Qq. vetor pode ser expresso como comb. linear de vetores-base.

<u>Exemplos</u>: (i)  v_1, v_2 LI; formam base p/ plano. dim = 2.

(ii) $\left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$ $n = 1, \dots \infty$ forma base p/ sp. de funções de quadrado integrável entre 0 e L. dim = ∞

(iii) $\{\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)\}$ = Harmônicos esféricos – base p/ funções 3D de □ integrável. $(d=\infty)$

(iv) $\{1, x, x^2\}$ base p/ polinômios de 2º grau – $d=3$.

Axiomas p/ espaço vetorial

- conj. de elementos (vetores) $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle$
- "corpo" de escalares (nos. complexos, reais, octonions, etc)

com 2 operações: adição de vetores (ex: $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$)
multiplicação de escalar por vetor (ex: $b \cdot |\alpha\rangle$)

Satisfazendo:

1) Associatividade da adição $(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle = |\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$ $\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle$

2) comutatividade da adição: $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$ $\forall |\beta\rangle, |\alpha\rangle$.

3) $\exists$ vetor $|0\rangle$ tal que $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle$ $\forall |\alpha\rangle$.

4) Adição tem inverso: $\forall |\alpha\rangle \; \exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso de } |\alpha\rangle}}{|-\alpha\rangle}$ tal que $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle$

5) multiplicação de escalar por vetor é distributiva em relação à adição de vetores.
$a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$

e distributiva em relação a adição de escalares
$(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$

6) Mult. de escalar por vetor é associativa com relação a mult. de escalares: $a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle$

7) $0|\alpha\rangle = |0\rangle$ $(\forall |\alpha\rangle)$
$1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ $(\forall |\alpha\rangle)$

Produto interno (ou escalar)

- Associa escalar $\langle \psi | \phi \rangle$ a cada par ordenado de vetores. Satisfaz as propriedades:

(a) $\langle \psi | \phi \rangle$ = complexo;

(b) $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$

(c) $\langle \phi | c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \rangle = c_1 \langle \phi, \psi_1 \rangle + c_2 \langle \phi, \psi_2 \rangle$ ⇒ prod. interno é linear no 2º argumento

(d) $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$, com igualdade sse $|\phi\rangle = 0$ (vetor nulo)

De b) e c): $\langle c_1\psi_1 + c_2\psi_2 | \phi \rangle = c_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + c_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle$

⇒ produto interno é anti-linear no 1º argumento.

- O produto interno generaliza a ideia de comprimento $\left(\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} \right)$ e ângulo entre 2 vetores, p/ espaços vetoriais gerais.

→ Para vetores-coluna: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \langle \psi | \phi \rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots$$
$$= \sum_{i=1}^{d} a_i^* b_i$$

- Para funções de x: $\langle \psi | \phi \rangle = \int \psi^*(x) \phi(x) \, dx$

- Norma (ou comprimento) de vetor: $\| |\phi\rangle \| = \langle \phi, \phi \rangle^{\frac{1}{2}}$

(*) De b) $\langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle^* \Rightarrow \langle \phi | \phi \rangle$ é real (como assumimos em (d))

- 2 kets $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são ortogonais se $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$ (e então $\langle \beta | \alpha \rangle = 0$ também).

~~• Qualquer ket não-nulo pode ser normalizado:~~ $\cancel{|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\| |\alpha\rangle \|} |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}} |\alpha\rangle}$

Vetores x raios

- Correção no postulado 1:

Postulado 1': Estado de S é um raio no espaço de Hilbert associado.

~~raio = conj. de todos os múltiplos de $|\psi\rangle$~~

raio = $\{|\alpha\rangle$ e todos os vetores $c|\alpha\rangle$ com $c \neq 0\}$

- Por isso, frequentemente representamos o est. físico de S pelo vetor normalizado:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\||\alpha\rangle\|}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}|\alpha\rangle$$

- Outra consequência: multiplicar $|\psi\rangle$ por fase global $e^{i\vartheta}$ não altera o estado físico.
(raio)

- muitas vezes usamos a terminologia vetor de estado quando, a rigor, seria raio.

2 Teoremas

- Desigualdade de Schwarz: $|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle$

- Desigualdade triangular: $\| |\psi\rangle + |\phi\rangle \| \leq \| |\psi\rangle \| + \| |\phi\rangle \|$

- Nos 2 casos, vale a igualdade se $|\psi\rangle = c|\phi\rangle$.

Espaço vetorial dual ao dos kets $\Rightarrow$ os bras

- Qq. espaço vetorial V tem um outro espaço vetorial associado — o espaço V' dos funcionais lineares em V. Explicando:

- Um funcional linear F associa um escalar $(F(\phi))$ a cada vetor $|\phi\rangle$, tal que $F(a|\phi\rangle + b|\psi\rangle) = a\,F(|\phi\rangle) + b\,F(|\psi\rangle)$ p/ quaisquer $|\phi\rangle, |\psi\rangle, a, b$.

- O conjunto de funcionais lineares $\{F\}$ formam um espaço vetorial V' se definimos a soma de funcionais:

$$(F_1 + F_2)|\phi\rangle = F_1|\phi\rangle + F_2|\phi\rangle$$

- O espaço vetorial V' dos funcionais lineares atuando em kets $(|\phi\rangle)$ é chamado de espaço dos bras $(\langle F|)$

(*) - O bra $\langle F|$ é o funcional linear que associa a cada ket $|\phi\rangle$ o número complexo $\langle F|\phi\rangle \leftarrow$ produto interno de $|F\rangle$ e $|\phi\rangle$.

[Teorema de Riesz, Ball. 1.1]

(*) É possível mostrar que existe correspondência biunívoca entre funcionais F e kets $|F\rangle$. A associação é anti-linear:

$$\underbrace{c_1^*\langle F| + c_2^*\langle G|}_{\text{bras}} \Leftrightarrow \underbrace{c_1|F\rangle + c_2|G\rangle}_{\text{kets}}$$

Operadores

- Pelo postulado 1, estados físicos são representados por vetores (ou raios).
- Para representar <u>observáveis</u> = grandezas físicas que podemos medir ("observar")

vamos precisar de <u>operadores</u> que atuam nos kets.

> • DINÂMICA: idem.

- Um <u>operador</u> X atua ("opera") num ket, (pela esquerda) resultando em outro ket:

$$X(|\alpha\rangle) = X|\alpha\rangle$$

- X e Y são <u>iguais</u> se $X|\alpha\rangle = Y|\alpha\rangle \quad \forall\, |\alpha\rangle$.
- X é o <u>operador nulo</u> se $X|\alpha\rangle = 0 \quad \forall\, |\alpha\rangle$.
- Adição de operadores: tem as propriedades

(i) $X+Y = Y+X$ (comutativa)

(ii) $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$ (associativa)

- Praticamente <u>todos</u> os operadores que usaremos são lineares:

$$X\left(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle\right) = c_1 X|\psi_1\rangle + c_2 X|\psi_2\rangle$$

- Multiplicação de operadores: $AB\psi := A(B\psi)$ (definição)

Logo, $A(BC) = (AB)C$ (associativa)

<u>MAS</u> $AB \neq BA$ em geral.

Exemplo:

1) - Op. linear em ~~espaço~~ $\mathcal{H}$ discreto e finito é representado por matriz quadrada.

$$M|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

• Escolho base ortonormal p/ espaço: $\{|u_i\rangle, i=1,\dots d\}$, $d = \dim(\mathcal{H})$, $\langle u_i|u_k\rangle = \delta_{i,k}$.

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_j a_j |u_j\rangle \quad , \quad |\phi\rangle = \sum_K b_K |u_K\rangle$$

$$\Rightarrow M \sum_j a_j |u_j\rangle = \sum_K b_K |u_K\rangle \qquad [\cdot \langle u_i|]$$

$$\Rightarrow \sum_j \langle u_i|M|u_j\rangle a_j = \sum_K \underbrace{\langle u_i|u_K\rangle}_{\delta_{i,K}} b_K = b_i$$

$$\Rightarrow \sum_j M_{ij} a_j = b_i$$ onde $M_{ij} \equiv \langle u_i|M|u_j\rangle$ é o elemento de matriz de M.

• Eq. de multiplicação matricial:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$$

$$M \quad |\psi\rangle = |\phi\rangle$$

2) $\mathcal{H}$: espaço de funções da variável x.

Operador: $\frac{\partial}{\partial x} x$ significa: • multiplique função f por x.
• deriva o result. em relação a x

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x f) = x\frac{\partial f}{\partial x} + f = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 1\right) f$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} x = x\frac{\partial}{\partial x} + 1$$ ← ~~identidade entre operadores~~ entre 2 operadores diferenciais são iguais.

- Vemos que $\frac{\partial}{\partial x} x \neq x\frac{\partial}{\partial x}$ ← ~~não comutam~~. x e $\frac{\partial}{\partial x}$ não comutam.

Operadores atuando em bras

- Se $\underset{\text{Bra}}{\langle\phi|} \Leftrightarrow \underset{\text{Ket}}{|\phi\rangle}$ e $A|\phi\rangle = |w\rangle$, então A^+ = o operador conjugado Hermitiano de A

é definido por: $\langle\phi|A^+ = \langle w|$ onde $\langle w| \Leftrightarrow |w\rangle$.

Ou seja: $\underbrace{\langle\phi|A^+}_{=\langle w|} \Leftrightarrow \underbrace{A|\phi\rangle}_{=|w\rangle}$ (i)

- Como $\langle w|\psi\rangle^* = \langle\psi|w\rangle \Rightarrow \langle\phi|A^+|\psi\rangle^* = \langle\psi|A|\phi\rangle \quad \forall\, \phi, \psi.$

(ii)

- A^+ é o operador que tem as propriedades (i) e (ii) acima.

Propriedades do conjugado Hermitiano de A:

- $(cA)^+ = c^* A^+$
- $(A+B)^+ = A^+ + B^+$
- $(AB)^+ = B^+ A^+$ *

* Da definição de conj. Hermitiano:

$$\langle\psi|(AB)^+|\phi\rangle^* = \langle\phi|A\underbrace{B|\psi\rangle}_{=|w\rangle} = \langle w|\phi\rangle^* = \langle\psi|B^+A^+|\phi\rangle^*$$

$$\boxed{\begin{aligned} &B|\psi\rangle \Leftrightarrow \langle\psi|B^+ \\ &A(B|\psi\rangle) \Leftrightarrow (\langle\psi|B^+)A^+ = \langle\psi|B^+A^+ \end{aligned}}$$

Vale $\forall\, \psi, \phi \Rightarrow (AB)^+ = B^+A^+$

- Dizemos que <u>A é op. Hermitiano</u> se $A = A^+$.

Produto externo:

- Já "misturamos" operadores e vetores-estado de várias formas:

$\langle\beta|\alpha\rangle$ = escalar

$X|\alpha\rangle$ = ket

$\langle\alpha|X$ = BRA

XY = operador.

Postulado: associatividade da notação de Dirac — as 2 interpretações são válidas

Produto externo ket-BRA: $|\beta\rangle\langle\alpha|$

$|\beta\rangle\langle\alpha|$ é um operador, definido assim:

$$\underbrace{\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\right)}_{\text{op.}}\underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{ket}} = \underbrace{|\beta\rangle}_{\text{ket}}\underbrace{\left(\langle\alpha|\alpha\rangle\right)}_{\text{escalar}}$$

~~← isso define a ação do operador $|\beta\rangle\langle\alpha|$ sobre qualquer $|\alpha\rangle$~~

- Qual é o conjugado Hermiteano de $|\beta\rangle\langle\alpha|$?

Lembre que $\langle\phi|A^\dagger|\psi\rangle^* = \langle\psi|A|\phi\rangle$

$$\Rightarrow \langle\phi|\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\right)^\dagger|\psi\rangle^* = \langle\psi|\beta\rangle\langle\alpha|\phi\rangle \qquad (\cdot^*)$$

$$\langle\phi|\left(|\beta\rangle\langle\alpha|^\dagger|\psi\rangle\right) = \underbrace{\langle\beta|\psi\rangle}_{\text{esc.}}\underbrace{\langle\phi|\alpha\rangle}_{\text{esc.}} = \langle\phi|\alpha\rangle\langle\beta|\psi\rangle$$

$$= \langle\phi|\left(|\alpha\rangle\langle\beta|\right)|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\right)^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|}$$

BALL. 1.3

Operadores Hermitianos

• A é Hermitiano se $A^{+} = A$. Como $\langle\phi|A^{+}|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|A|\phi\rangle$, se

$$A = A^{+} \Rightarrow \boxed{\langle\phi|A|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|A|\phi\rangle}$$

~~• Determinando se A é Hermitiano.~~

~~Teorema: Se $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle^{*}$ $\forall\, |\psi\rangle$~~

~~$\Rightarrow A = A^{+}$.~~

• Lembrando: se $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle \Rightarrow |\phi\rangle$ é autovetor de A, com autovalor a.

- a eq. de auto $\begin{cases}\text{vetor}\\ \text{valor}\end{cases}$ no espaço dos bras fica: $\langle\phi|A^{+} = a^{*}\langle\phi|$

Teorema: Se A é op. Hermitiano, todos seus autovalores são reais.

$A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$. Como A é Hermitiano, $\langle\phi|\underbrace{A|\phi\rangle}_{=a|\phi\rangle} = \langle\phi|\underbrace{A|\phi\rangle}_{a|\phi\rangle}^{*}$

$$\Rightarrow \langle\phi|a|\phi\rangle = \langle\phi|a|\phi\rangle^{*} \Leftrightarrow a\langle\phi|\phi\rangle = a^{*}\langle\phi|\phi\rangle$$

$$\Rightarrow a = a^{*} \Leftrightarrow a \text{ real}.$$

Teorema: Autovetores ~~de op. Hermitiano~~ correspondentes a autovalores diferentes de op. Hermitiano são ortogonais.

$$\begin{cases} A|\phi_1\rangle = a_1|\phi_1\rangle \\ A|\phi_2\rangle = a_2|\phi_2\rangle \end{cases}$$

Sei que $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|A|\phi_1\rangle^{*}$

$$\Rightarrow 0 = \langle\phi_1|A|\phi_2\rangle - \langle\phi_2|A|\phi_1\rangle^*$$

; $(A|\phi_1\rangle)^* = (a|\phi_1\rangle)^* = a\langle\phi_1|$ (a real)

$$= a_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle - a_1\langle\phi_2|\phi_1\rangle^*$$

$$= a_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle - a_1\langle\phi_1|\phi_2\rangle$$

$$= (a_2-a_1)\langle\phi_1|\phi_2\rangle$$

$\Rightarrow$ Se $a_2 \neq a_1 \Rightarrow \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0 \Leftrightarrow$ ortogonais.

—————— || ——————

Como os autovetores são ortogonais (e cada autovetor é definido a menos de constante multiplicativa) [$\longrightarrow |\phi_i\rangle$ é autovetor com autovalor a_i $\Rightarrow c|\phi_i\rangle$ também é], podemos escolher um conjunto ortonormal de autovetores:

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$$

- Para $\mathcal{H}$ de dimensão finita, o conj. $\{|\phi_i\rangle\}$ é completo, i.e., forma uma base para $\mathcal{H}$.

  $\Leftrightarrow$ qualquer vetor $|\psi\rangle$ pode ser expandido em termos dos $\{|\phi_i\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \sum c_i|\phi_i\rangle$$

[para discussão e referência da prova, veja Ball. Seç. 1.3]

- O mesmo não é necessariamente verdade em espaço de Hilbert de dimensão infinita — ver contra-exemplos em ( ).

Autovetores do op. Hermitiano como base

$$|\alpha\rangle = \sum_j c_j |\phi_j\rangle$$

$\{|\phi_j\rangle\}$ = base de autovet. de op. Hermitiano A.

[$\cdot \langle\phi_i|$ dos 2 lados da eq.]

$$\langle\phi_i|\alpha\rangle = \sum_j c_j \underbrace{\langle\phi_i|\phi_j\rangle}_{\delta_{ij}} = c_i$$

← coefs. da expansão são produtos internos $\langle\phi_i|\alpha\rangle$.

$$\Rightarrow |\alpha\rangle = \sum_j \underbrace{\langle\phi_j|\alpha\rangle}_{\text{núm. c.}} |\phi_j\rangle$$

$$= \sum_j |\phi_j\rangle \langle\phi_j|\alpha\rangle$$

- A expansão de $|\alpha\rangle$ na base $\{|\phi_i\rangle\}$ é análoga à expansão de vetor $\vec{v}$ em base p/ esp. vetorial real:

$$\vec{v} = v_1 \hat{v}_1 + v_2 \hat{v}_2 + v_3 \hat{v}_3 = \sum_j \hat{v}_j (\hat{v}_j \cdot \vec{v})$$

↑ vetor unitário ↖ componente v_j

De novo:

$$|\alpha\rangle = \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|\alpha\rangle$$

Uso a Regra associativa, válida p/ notação de Dirac:

$$|\alpha\rangle = \sum_j \underbrace{|\phi_j\rangle}_{\text{vetor}} \underbrace{\langle\phi_j|\alpha\rangle}_{\text{nº complexo}}$$

ou

$$|\alpha\rangle = \underbrace{\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|}_{\text{operador}} \underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{vetor}}$$

ambas as interpretações são válidas.

Na 2ª expansão, $\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ deve ser o op. <u>identidade</u> $\mathbb{1}$.

$$\boxed{\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \mathbb{1}}$$

← relação de fechamento ou <u>completeza</u> do conj. $\{|\phi_j\rangle\}$.

SAK 1.3

- A relação de completeza é muito útil. Por exemplo:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \underbrace{=}_{\text{mudança de notação}} \langle\alpha|\underset{\uparrow\ \mathbb{1}}{}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\left(\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right)|\alpha\rangle$$

$$= \sum_i \langle\alpha|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\alpha\rangle = \sum_i |\langle\phi_i|\alpha\rangle|^2$$

Lembrando que $\langle\phi_i|\alpha\rangle$ são os coeficientes da expansão de $|\alpha\rangle$ na base $\{|\phi_i\rangle\}$

$|\alpha\rangle = \sum_i \underbrace{\langle\phi_i|\alpha\rangle}_{c_i} |\phi_i\rangle$, vemos que $\sum_i |c_i|^2 = 1$ (assumindo $|\alpha\rangle$ normalizado)

— || —

<u>Projetores</u>

- Vimos que $\mathbb{1} = \sum_i |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ é operador. Na verdade, <u>cada termo</u> dessa soma é um operador <u>de projeção</u>, ou projetor.

. O porquê do nome:

$$(|\phi_j\rangle\langle\phi_j|)|\alpha\rangle \overset{\text{post associativo}}{=} |\phi_j\rangle\underbrace{\langle\phi_j|\alpha\rangle}_{\text{num. complexo}} = \underbrace{\langle\phi_j|\alpha\rangle|\phi_j\rangle}_{\text{= componente de } |\alpha\rangle \text{ na direção } |\phi_j\rangle}$$

SAK 1.3

Representação de op. por matriz quadrada

$$X = \mathbb{1} X \mathbb{1} = \sum_i \sum_j |\phi_i\rangle\langle\phi_i| X |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$= \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| X \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

POST. ASSOCIATIVO

$$= \sum_i \sum_j |\phi_i\rangle \underbrace{\langle\phi_i|X|\phi_j\rangle}_{\text{num. } \mathbb{C}} \langle\phi_j|$$

$$= \sum_i \sum_j \langle\phi_i|X|\phi_j\rangle \, |\phi_i\rangle\langle\phi_j|$$

- Temos d^2 números complexos que definem o op. X expandido nessa base p/ operadores — os operadores $\{|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\}$.

- Organizamos os coeficientes (="elementos de matriz") de X em matriz $d\times d$:

$$X = \begin{pmatrix} \langle\phi_1|X|\phi_1\rangle & \langle\phi_1|X|\phi_2\rangle & \cdots & \\ \langle\phi_2|X|\phi_1\rangle & \langle\phi_2|X|\phi_2\rangle & \cdots & \\ & \vdots & & \\ & & & \langle\phi_d|X|\phi_d\rangle \end{pmatrix}$$

- Sabemos que $\langle\phi_i|X|\phi_j\rangle = \langle\phi_j|X^\dagger|\phi_i\rangle^*$, ou seja, em termos das matrizes a matriz que representa $X^\dagger$ é a matriz^X transposta e conjugada.

- Se o op. B é Hermitiano, $\langle\phi_i|B|\phi_j\rangle = \langle\phi_j|B|\phi_i\rangle^*$

- O operador *produto* $Z = XY$ é representado por matriz que é o produto das matrizes X e Y.

$$\langle \phi_i | Z | \phi_j \rangle = \langle \phi_i | X \underset{\mathbb{1}}{\wedge} Y | \phi_j \rangle = \sum_K \underbrace{\langle \phi_i | X | \phi_K \rangle}_{X_{iK}} \underbrace{\langle \phi_K | Y | \phi_j \rangle}_{Y_{Kj}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_{ij} = \sum_K X_{iK} Y_{Kj}$$

- Reparem que a representação de um op. A como matriz depende da *base* usada.

- Outras propriedades de representações de um op. A podem ser *indep. da base*, Exemplo: Traço do op. A:

  - $Tr\, A = \sum_j \langle \phi_j | A | \phi_j \rangle$ = soma dos ~~elementos~~ diagonal

  [Exercício lista: mostre que é indep. da base]

- Já vimos que $|\beta\rangle = X|\alpha\rangle$ também é *eq. matricial*

  vetor coluna ↗ ($|\beta\rangle$), matriz □ (X), vet. coluna ($|\alpha\rangle$)

$$\langle \phi_i | \beta \rangle = \langle \phi_i | X \underset{\mathbb{1}}{\wedge} | \alpha \rangle = \sum_{\phi_j} \langle \phi_i | X | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \alpha \rangle$$

$$\beta_i = \sum_j X_{ij} \alpha_j$$

• e BRA's?

$$\langle\beta| = \langle\alpha|X \qquad \cdot|\phi_i\rangle$$

$$\langle\beta|\phi_i\rangle = \underset{\mathbb{1}}{\langle\alpha|\;X|\phi_i\rangle} = \sum_j \langle\alpha|\phi_j\rangle\langle\phi_j|X|\phi_i\rangle$$

$$\Rightarrow \beta_i^* = \sum_j \alpha_j^* X_{ji}$$

$$\overset{\langle\beta|}{(\ ,\ ,\ ,\ )} = \overset{\langle\alpha|}{(\ ,\ ,\ ,\ )} \overset{X}{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}$$

• $\langle\beta|$ é repres. por $(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_d^*)$ ← vetor linha

• Produto interno?

$$\langle\beta\underset{\mathbb{1}}{|}\alpha\rangle = \sum_i \langle\beta|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\alpha\rangle = \sum_i \beta_i^* \alpha_i$$

$$= \overset{\langle\beta|}{(\ ,\ ,\ ,\ )} \cdot \overset{|\alpha\rangle}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}$$

• Produto externo?

$\mathbb{1}|\beta\rangle\langle\alpha|\mathbb{1}$ [Como fazer?]

$$= \sum_i \sum_j |\phi_i\rangle\underbrace{\langle\phi_i|\beta\rangle}_{\beta_i}\underbrace{\langle\alpha|\phi_j\rangle}_{\alpha_j^*}\langle\phi_j| = \sum_i \sum_j \beta_i \alpha_j^* |\phi_i\rangle\langle\phi_j|$$

$|\phi_3\rangle\langle\phi_2|$ é repres. por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$

Logo $|\beta\rangle\langle\alpha|$ é repres. por $\begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1^* & \beta_1\alpha_2^* & \cdots \\ \beta_2\alpha_1^* & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

Representação espectral de operadores

$$\mathbb{1} A \mathbb{1} = \sum_i \sum_j |\phi_i\rangle\langle\phi_i| A |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

Agora escolhemos ~~a~~ base $\{|\phi_i\rangle\}$ de auto-estados de A. Nessa base A é diagonal:

$$\langle\phi_i|A|\phi_j\rangle = \langle\phi_i|A|\phi_j\rangle \delta_{ij} = a_j \delta_{ij}$$

onde $A|\phi_j\rangle = a_j |\phi_j\rangle$

autovalor

$$\Rightarrow A = \sum_i \sum_j |\phi_i\rangle \underbrace{\langle\phi_i|A|\phi_j\rangle}_{= a_j \delta_{ij}} \langle\phi_j| = \sum_j a_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$\Rightarrow A = \sum_j a_j P_j$$ onde $P_j \equiv |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ é o projetor em $|\phi_j\rangle$.

- Essa é a representação espectral de A — complica um pouco no caso degenerado e particularmente, no caso ~~[illegible]~~ de espectro contínuo.

[ver Ball sec 1.3]

<u>Exemplos</u>: spin $\frac{1}{2}$.

- Usamos base de S_z: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$: $\begin{cases} S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ S_z|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{cases}$

- Completeza: $\mathbb{1} = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$

- Representação espectral de S_z: $S_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle-|$

- Operadores de <u>subida</u> e <u>descida</u> (de S_z):

$$S_+ = \hbar|+\rangle\langle-| \qquad S_- = \hbar|-\rangle\langle+|$$

$$\left.\begin{aligned} S_+|-\rangle &= \hbar|+\rangle\underbrace{\langle-||-\rangle}_{1} = \hbar|+\rangle \\ S_+|+\rangle &= \hbar|+\rangle\underbrace{\langle-|+\rangle}_{0} = 0 \end{aligned}\right\} \text{op. subida}$$

$$S_-|-\rangle = 0$$

$$S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle\underbrace{\langle+||+\rangle}_{1} = \hbar|-\rangle \Big\} \text{ op. descida}$$

- S_+ e S_- não são hermitianos: Ex: $S_+^\dagger = (\hbar|+\rangle\langle-|)^\dagger$
$$= \hbar|-\rangle\langle+| \neq S_+$$

- Representações matriciais:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Mais adiante no curso discutiremos como encontrar representação matricial de ops. de spin arbitrário.

Medidas e observáveis

- Vimos no Postulado 1 que o estado de um sist. físico é representado por vetor (ou raio) num espaço vetorial complexo (espaço de Hilbert).
- Desenvolvemos a teoria de operadores lineares, Hermitianos em particular.
- Agora para a representação de medidas (= medições) e seus resultados em MQ.

Postulado 2 (Medidas). As grandezas físicas mensuráveis são representadas por operadores Hermitianos, que chamamos observáveis.

- Os resultados possíveis da medida são os autovalores do observável A correspondente.
- Os resultados são probabilísticos. A probabilidade de sair o resultado a_i é

$$p(a_i) = |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2$$

onde $|\psi\rangle$ é o est. do sistema, $|\phi_i\rangle$ é auto-estado de A correspondente a autovalor a_i

~~- O sist. medido é afetado pela medida. O est. posterior à medida A com autovalor a_i é o auto-estado correspondente $|\phi_i\rangle$~~

Valor esperado de observável A

Se valores $\begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_d \end{cases}$ saem com prob. $\begin{matrix} p(a_1) \\ P(a_2) \\ \vdots \\ p(a_d) \end{matrix}$, o valor médio $\langle A \rangle$ de várias medidas feitas em sistemas no mesmo estado $|\psi\rangle$ é:

$$\langle A\rangle = \sum_i p(a_i)a_i = \sum_i |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2 a_i$$

$$= \sum_i \langle\phi_i|\psi\rangle\langle\psi|\phi_i\rangle a_i = \sum_i \langle\psi|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi\rangle a_i$$

$$= \langle\psi| \underbrace{\sum_i a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|}_{A\text{, na sua representação espectral}} |\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

- Vemos que o valor médio dos resultados de medidas de A em sistemas idênticos (~~todos~~ no est. $|\psi\rangle$) é

$$\boxed{\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle}$$

Postulado 3 (~~[illegible]~~ Estado pós-medida)

Após medida de A com resultado a_i, o estado do sistema é $|\phi_i\rangle$ = auto-estado de A correspondente a a_i; independentemente de qual estado tínhamos antes da medida.

OBS:

1 - Medidas alteram o sistema, de forma descontínua. Veremos que sist. também evoluem de forma contínua, entre medidas.

2 - Medidas sucessivas de um mesmo observável A sempre resultam
- no mesmo resultado (a_i)
- no mesmo estado $|\phi_i\rangle$.

3 - Em geral $\langle A\rangle$ é diferente de todos os autovalores de A. Mas

$\min(\{a_i\}) \leq \langle A\rangle \leq \max(\{a_i\})$ ← pela definição da média.

4 - Se $|\psi\rangle$ é normalizado, $\| |\psi\rangle \|^2 = |\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1$.

Uso $|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi_i|\psi\rangle|\phi_i\rangle$

$$\Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi_i|\psi\rangle\langle\psi|\phi_i\rangle = \sum_i \underbrace{|\langle\phi_i|\psi\rangle|^2}_{p(a_i)} = 1$$

Vemos que: $\sum_i p(a_i) = 1$ e $p(a_i) \geq 0$ } como esperamos dos postulados sobre probabilidades.

Podemos reescrever (e generalizar) o Postulado 3 usando operadores de projeção.

[Preskill 2.1]

Definição: P é op. de projeção se

1. $P = P^\dagger$ (Hermitiano)
2. $P = P^2$

Exemplos: A) $P = |\psi\rangle\langle\psi|$, pois é Hermitiano e

$$P^2 = |\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P.$$

B) $\mathbb{1}$.

C) Se P é op. de projeção, $\mathbb{1} - P$ também é.

1. Soma (e diferença) de ops. Hermitianos é op. Hermitiano. ✓
2. $(\mathbb{1}-P)(\mathbb{1}-P) = \mathbb{1} - P - P + \underbrace{P^2}_{=P} = \mathbb{1} - P$ ✓

D) $\{|\phi_k\rangle\}$ base, dim d. $K \leq d$. $P = \sum_{k=1}^{K} |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ é projetor. (*)

Teorema: Autovalores de op. de projeção P são 0 ou 1.

Prova: p/ qualquer autovetor $|\phi_i\rangle$ com autovalor a_i temos:

$$a_i|\phi_i\rangle = P|\phi_i\rangle = P^2|\phi_i\rangle = (a_i)^2|\phi_i\rangle \Rightarrow a_i = a_i^2$$

$\Rightarrow a_i = 0$ ou 1.

(*) $P^2 = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} |\phi_j\rangle\underbrace{\langle\phi_j|\phi_i\rangle}_{\delta_{ij}}\langle\phi_i| = \sum_{i=1}^{K} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = P$

• No exemplo D) acima, especificamos um operador que projeta num sub-espaço (de K dimensões) de $\mathcal{H}$.

$$P = \sum_{i=1}^{k} |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad . \quad \text{Se} \quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i |\phi_i\rangle$$

$$\Rightarrow P|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{K} c_i |\psi_i\rangle$$ ← só "restam" componentes no sub-espaço de K dimensões.

<u>POSTULADO 3b</u>: O estado pós-medição (observável A, resultado a_i, auto-~~vetor~~ estados associados ~~a~~ $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_K\rangle$) é

$$P_{a_i}|\psi\rangle \quad , \text{ com } \quad P_i = \sum_{i=1}^{K} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$ = projetor no sub-espaço gerado por $|\phi_1\rangle, \dots |\phi_K\rangle$.

<u>Postulado 2b</u>: a probabilidade de obter autovalor a_i (mesma situação acima) é

$$p(a_i) = \| P_i |\psi\rangle \|^2 = \langle\psi| P_i P_i |\psi\rangle = \langle\psi| P_i |\psi\rangle.$$

↑ cobre o caso degenerado.

Exemplo: SPIN $\frac{1}{2}$

• Veremos que postulados + S.G. nos dão os auto-estados de S_x e os operadores S_x e S_y.

Lembrando:

Em palavras: auto-estado de S_x com autovalor $+\frac{\hbar}{2}$ (Notação: $|\uparrow_x\rangle$) tem prob. $\frac{1}{2}$ de ser medido $|\uparrow_z\rangle$ e $|\downarrow_z\rangle$.

$$\Rightarrow |\langle\uparrow_z|\uparrow_x\rangle| = |\langle\downarrow_z|\uparrow_x\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• O ket $|\uparrow_x\rangle$ tem que ser da forma:

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_2}|\downarrow_z\rangle$$

• Por conveniência, escolhemos outro ket fisicamente equivalente mas com o 1º coeficiente real: [Lembrem da diferença raio × vetor em $\mathcal{H}$]

$$\boxed{|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|\downarrow_z\rangle}\ , \quad \text{onde } \delta \equiv \delta_2 - \delta_1 \qquad \text{(I)}$$

• $|\downarrow_x\rangle$ deve ser ortogonal a $|\uparrow_x\rangle$:

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|\downarrow_z\rangle$$

Mesma convenção de fase real

• Com os 2 autovetores de S_x, uso teorema espectral:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x| - |\downarrow_x\rangle\langle\downarrow_x|\right) = \frac{\hbar}{2}\left(e^{-i\delta}|\uparrow_z\rangle\langle\downarrow_z| + e^{i\delta}|\downarrow_z\rangle\langle\uparrow_z|\right)$$

• Repare que S_x é Hermitiano.

· Fazendo o mesmo raciocínio p/ estado $|\uparrow_y\rangle$ em que medimos S_z:

$$\boxed{|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta'}|\downarrow_z\rangle}$$

$$\boxed{|\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta'}|\downarrow_z\rangle} \quad \mathrm{II}$$

$$\Rightarrow S_y = \frac{\hbar}{2}\left(e^{-i\delta'}|\uparrow_z\rangle\langle\downarrow_z| + e^{i\delta'}|\downarrow_z\rangle\langle\uparrow_z|\right)$$

· Como podemos determinar δ, δ'? Precisamos de mais um experimento:

, ou seja,

$$\left.\begin{aligned} |\langle\uparrow_y|\uparrow_x\rangle|^2 &= |\langle\uparrow_y|\downarrow_x\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ \downarrow_y \qquad & \qquad \downarrow_y \qquad = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$ Não é surpreendente pela invariância sob rotações.

· Usando eqs. I e II nas expressões acima, achamos

$$\frac{1}{2}\left|1 \pm e^{i(\delta-\delta')}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

satisfeito somente se $\delta' - \delta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Vemos que as fases que aparecem em S_x e S_y têm parte imaginária

$\Rightarrow$ se S_x é real, S_y é imaginária.

· Por convenção, S_x é real $\Leftrightarrow \delta = 0$. $\rightarrow \delta' = \pm\frac{\pi}{2}$.

· a ambiguidade de sinal deve-se à orientação não-especificada dos eixos (regra da mão direita ou esquerda).

$\hookrightarrow \delta' = \frac{\pi}{2}$.

Resumindo

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle$$

$$|\downarrow_x\rangle \qquad -$$

$$|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle$$

$$|\downarrow_y\rangle \qquad -$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|\uparrow_z\rangle\langle\downarrow_z| + |\downarrow_z\rangle\langle\uparrow_z|\right)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left(-i|\uparrow_z\rangle\langle\downarrow_z| + i|\downarrow_z\rangle\langle\uparrow_z|\right)$$

Agora que temos S_z, S_x e S_y podemos definir $\vec{S}\cdot\vec{S} = S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$

• É fácil mostrar que $S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$. Para spins maiores que $\frac{1}{2}$, S^2 não será mais proporcional à identidade ($\mathbb{1}$).